# La loi de Stefan-Boltzmann, du soleil au graphène

1879

1884

Gilles Montambaux

LPS ORSAY

UTMB, 24 juin 2022

# La loi de Stefan-Boltzmann

Joseph Stefan (1835-1893)

1879 J. Stefan montre expérimentalement que :

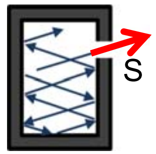
La puissance totale émise par unité de surface
par un corps noir varie comme

$$R(T) = \sigma\ T^4$$

constante de Stefan-Boltzmann

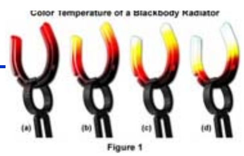

Densité d'énergie totale

$$\boxed{u(T) = A\ T^4}$$




$$R(T) = \frac{c}{4} u(T) = \sigma\ T^4$$

# Le corps noir, une histoire brève




1859 Kirchhoff : fonction universelle $u(\nu, T)$

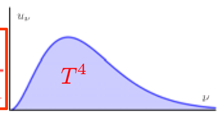
1879 Stefan montre expérimentalement que $u(T) \propto T^4$

1884 Dérivation théorique par Boltzmann

1893 Loi de Wien $u(\nu, T) = \nu^3 f(\nu/T)$

1900 Planck

$$\boxed{u(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}}$$




$$u(T) = \int_0^\infty u(\nu, T) d\nu = \frac{\pi^2 k^4}{15\hbar^3 c^3}\ T^4$$

La démonstration de Boltzmann est purement classique : $T^4$

$\boxed{\text{Deuxième principe + pression de radiation de Maxwell}}$

# Plan

- ❑ Rappel : brève dérivation de la loi de Boltzmann

$P(T) = 3\, u(T)$ + Second principe ⟹ $u(T) \propto\ T^4$

*Maxwell*

- ❑ La physique classique est suffisante

La physique classique est suffisante pour l'énergie totale $u(T)$

La physique quantique est nécessaire pour la distribution spectrale $u(\nu, T)$

*Planck 1900 : Sur la loi de distribution de l'énergie dans le spectre normal*

$$u(\nu, T)$$

## Plan

- Rappel : brève dérivation de la loi de Boltzmann

$P(T) = 3\,u(T)$ + Second principe $\Rightarrow$ $u(T) \propto T^4$

*Maxwell*

- La physique classique est suffisante

- Généralisation de la loi de SB à toutes sortes de gaz de particules

photons, phonons
particules massives → Thermodynamique du gaz de Bose
bosons, fermions dans des géométries variées
relations de dispersion hybrides

… sans la mécanique quantique…

## La démonstration de Boltzmann (1884)

XV. *Ableitung des Stefan'schen Gesetzes*[1], *betreffend die Abhängigkeit der Wärmestrahlung von der Temperatur aus der electromagnetischen Lichttheorie;* *von Ludwig Boltzmann in Graz.*

*Dérivation de la loi de Stefan*
*concernant la dépendance en température du rayonnement thermique*
*dans la théorie électromagnétique de la lumière*

*Ann. Physik Chemie* **258**, 291 (1884).

$$\boxed{u(T) = A\ T^4}$$

## La démonstration de Boltzmann (1884)

$$E(T,V) = V u(T)$$

$$TdS = dE + PdV = \frac{\partial E}{\partial T}dT + \left(P + \frac{\partial E}{\partial V}\right) dV\ .$$

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{P+u}{T}}$$

J. C. Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism*, Oxford (1873)

Hence in a medium in which waves are propagated there is a pressure in the direction normal to the waves, and numerically equal to the energy in unit of volume.

Pression de radiation (argument 1D) $P(T) = u(T)$

Boltzmann fait la moyenne angulaire : $\boxed{P(T) = \frac{u(T)}{3}}$

$$\boxed{\frac{1}{4}\frac{du}{u} = \frac{dT}{T}} \Rightarrow \boxed{u(T) \propto T^4}$$

et le préfacteur ?

## Remarque : le préfacteur

$$\boxed{u(T) = \frac{\pi^2 k^4}{15\hbar^3 c^3}\,T^4}$$

$$\boxed{u(T) \propto T^4}$$

La loi de Boltzmann implique l'existence d'une unité naturelle d'action…

$\frac{\text{Énergie}}{\text{Volume}}$ = [ ] Température$^4$

$$c, k, ??$$

Unité d'action… $\Rightarrow$ $u(T) \propto \frac{k^4}{h^3 c^3}\,T^4$

En 1899, Planck découvre une unité naturelle d'action *avant la quantification* !

1899 !

## Loi de Boltzmann pour des particules massives ?

$$E(T,V) = V u(T)$$

(1) $\boxed{\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{P+u}{T}}$

$$P(T) = \frac{1}{3} u(T)$$

Maxwell
Électromagnétisme

Version moderne : pression de radiation pour des particules sans masse

$$P(T) = \frac{1}{3} u(T) \Longrightarrow \frac{1}{4}\frac{du}{u} = \frac{dT}{T}$$

$$u(T) \propto T^4$$

Peut-on étendre la loi de Boltzmann pour des particules massives ?

## Loi de Boltzmann pour des particules massives ?

$$E(T,V) = V u(T)$$

(1) $\boxed{\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{P+u}{T}}$ FAUX ! Sauf si ...

$$P(T) = \frac{1}{3} u(T)$$

Maxwell
Électromagnétisme

Version moderne : pression de radiation pour des particules sans masse

$$P(T) = \frac{1}{3} u(T) \Longrightarrow \frac{1}{4}\frac{du}{u} = \frac{dT}{T}$$

$$u(T) \propto T^4$$

Particules massives

$$P(T) = \frac{2}{3} u(T) \Longrightarrow \frac{2}{5}\frac{du}{u} = \frac{dT}{T}$$

$$u(T) \propto T^{5/2}$$

Quel sens donner à ce résultat ?

La relation de Boltzmann (1) est-elle correcte pour les particules massives ?

NON ! Sauf si …

## Loi de Boltzmann pour des particules massives ?

La relation thermodynamique correcte est

$$TdS = dE + pdV - \mu dN$$

(1) $\boxed{\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{P+u}{T}}$ FAUX ! Sauf si ...

## Loi de Boltzmann pour des particules massives ?

La relation thermodynamique correcte est

$$TdS = dE + pdV - \mu dN$$

$$\boxed{\left.\frac{\partial P}{\partial T}\right|_{\mu=0} = \frac{P+u}{T}}$$

La dérivation de Boltzmann est donc correcte si $\mu = 0$ .

| | | | |
|---|---|---|---|
| Photons | OK | $P(T) = \frac{1}{3} u(T)$ | $u(T) \propto T^4$ |
| Particules massives | OK if $\mu = 0$ | $P(T) = \frac{2}{3} u(T)$ | $u(T) \propto T^{5/2}$ |

- Le gaz de Bose saturé (T < $T_{BEC}$) rien de quantique !
- Les magnons dans un ferromagnétique à 3D

## Loi de Boltzmann pour des particules massives (dimensions)

$u(T) \propto T^{5/2}$ $\mu = 0$ .

$\frac{\text{Énergie}}{\text{Volume}}$ = [ ] Température$^{5/2}$ $h, m, k$

$$\Rightarrow \quad u(T) \propto \frac{m^{3/2}}{h^3} (kT)^{5/2}$$

- Le gaz de Bose saturé (T < $T_{BEC}$) rien de quantique !
- Les magnons dans un ferromagnétique à 3D

$$\boxed{u(T) = 3\sqrt{2}\pi^{3/2}\zeta(5/2)\frac{m^{3/2}}{h^3} (kT)^{5/2}}$$

## Loi de Stefan-Boltzmann généralisée

Thermodynamique + relation cinétique + $\mu = 0$ .

$\epsilon = pc$ $\quad u = 3P$ $\quad \Rightarrow \quad u(T) \propto \frac{k^4}{h^3 c^3} T^4$

$\epsilon = \frac{p^2}{2m}$ $\quad u = \frac{3}{2}P$ $\quad \Rightarrow \quad u(T) \propto \frac{m^{3/2}}{h^3} (kT)^{5/2}$

$\epsilon \propto p^\gamma$ $\quad u = \frac{d}{\gamma}P$

$$\boxed{u = \kappa P \quad \Rightarrow \quad u(T) \propto \frac{(mc^2)^{d-\kappa}}{(hc)^d} (kT)^{1+\kappa}}$$

L'homogénéité implique une masse et une vitesse

si $\kappa = d$ , seulement une vitesse
si $\kappa = d/2$ seulement une vitesse
en général, les deux

## Loi de Stefan-Boltzmann généralisée

$\boxed{\alpha = \beta\mu}$

Thermodynamique + relation cinétique + $\mu = 0$ .

$u = \kappa P \qquad E = \kappa PV$

se généralise en $\boxed{E = -\kappa\Omega}$ grand potential

$$\left.\begin{aligned} E &= -\left.\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \beta}\right|_\alpha \\ \Omega &= -\frac{1}{\beta}\ln \mathcal{Z} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{E = \left.\frac{\partial \beta\Omega}{\partial \beta}\right|_\alpha} \quad \Longrightarrow \quad \left.\frac{\partial \beta E}{\beta E}\right|_\alpha = -\kappa \frac{\partial \beta}{\beta}$$

$$E \propto T^{\kappa+1}$$

$$\boxed{\Omega = E - TS - \mu N}$$

## Loi de Stefan-Boltzmann généralisée

$\boxed{\alpha = \beta\mu}$

Thermodynamique + relation cinétique + $\mu = 0$ .

$u = \kappa P \qquad E = \kappa PV$

se généralise en $\boxed{E = -\kappa\Omega}$ grand potential

$$\left.\begin{aligned} E &= -\left.\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \beta}\right|_\alpha \\ \Omega &= -\frac{1}{\beta}\ln \mathcal{Z} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{E = \left.\frac{\partial \beta\Omega}{\partial \beta}\right|_\alpha}$$

$$\boxed{E(T) = \cancel{F(\alpha)} \left(\frac{L}{hc}\right)^d (mc^2)^{d-\kappa} (kT)^{1+\kappa}}$$

$$\boxed{\Omega = E - TS - \mu N}$$

## Loi de Stefan-Boltzmann généralisée

$$\boxed{E(T) \sim \left(\frac{L}{hc}\right)^d (mc^2)^{d-\kappa}\,(kT)^{1+\kappa} \sim \underbrace{\frac{V}{\lambda_{dB}^{2(d-\kappa)}\lambda_W^{2\kappa-d}}}_{N(T)\,\propto\, T^\kappa}\,kT}$$

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{\sqrt{2\pi m kT}}$$

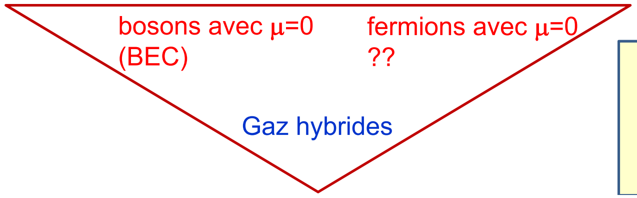
Longueur de de Broglie

$$\lambda_W = \frac{hc}{kT}$$

« longueur de Wien »

Ni mécanique quantique, ni statistique quantique

→ décrit aussi :




$$E(T) \sim N(T)kT$$
$$N(T) \propto T^\kappa$$

## Loi de Stefan-Boltzmann généralisée $\quad E = -\kappa\Omega \implies N(T) \propto T^\kappa$

$$E(T) \sim \left(\frac{L}{hc}\right)^d (mc^2)^{d-\kappa}\,(kT)^{1+\kappa} \sim \frac{V}{\lambda_{dB}^{2(d-\kappa)}\lambda_W^{2\kappa-d}}\,kT$$

## Loi de Stefan-Boltzmann généralisée $\quad E = -\kappa\Omega \implies N(T) \propto T^\kappa$

$$E(T) \sim \left(\frac{L}{hc}\right)^d (mc^2)^{d-\kappa}\,(kT)^{1+\kappa} \sim \frac{V}{\lambda_{dB}^{2(d-\kappa)}\cancel{\lambda_W^{2\kappa-d}}}\,kT$$

Particules massives dans une boîte


$$E = \frac{d}{2}PV = -\frac{d}{2}\Omega$$

$$N(T) \sim \left(\frac{L}{\lambda_{dB}}\right)^d \propto T^{d/2}$$

## Loi de Stefan-Boltzmann généralisée $\quad E = -\kappa\Omega \implies N(T) \propto T^\kappa$

$$E(T) \sim \left(\frac{L}{hc}\right)^d (mc^2)^{d-\kappa}\,(kT)^{1+\kappa} \sim \frac{V}{\cancel{\lambda_{dB}^{2(d-\kappa)}}\lambda_W^{2\kappa-d}}\,kT$$

Particules massives dans une boîte

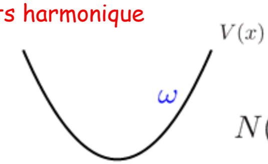

$$E = \frac{d}{2}PV = -\frac{d}{2}\Omega$$

$$N(T) \sim \left(\frac{L}{\lambda_{dB}}\right)^d \propto T^{d/2}$$

Particules massives dans un puits harmonique

$V$ ? $\qquad E = -d\,\Omega$ .

$$\frac{c}{L} \longrightarrow \omega$$



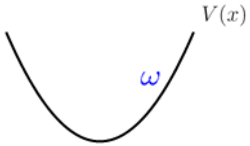

$$N(T) \sim \left(\frac{V}{\lambda_W}\right)^d \sim \left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)^d$$

= particules dans masse

## Loi de Stefan-Boltzmann généralisée $E = -\kappa\Omega \implies N(T) \propto T^{\kappa}$

Particules massives dans un puits harmonique

$V\,?$ $\qquad E = -d\,\Omega\,.$




$$\epsilon = (n_x + n_y + n_z)\,\hbar\omega_c$$

$$\omega \longleftrightarrow \frac{\pi c}{L}$$

= particules dans masse

$$\epsilon = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}\; c = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}\;\frac{\hbar \pi c}{L}$$

## Spectre hybride $E = -\kappa\Omega \implies N(T) \propto T^{\kappa}$

Massif de long de $d_m$ directions $\qquad u = \frac{d_m}{2} P \Rightarrow N(T) \propto T^{d_m/2}$

Sans massse le long de $d_c$ directions $\qquad u = d_c\, P \Rightarrow N(T) \propto T^{d_c}$

Spectre « hybride »:

Massif le long de $d_m$ directions, sans masse le long de $d_c$ directions $\qquad u = \left(d_c + \frac{d_m}{2}\right) P$

$$\boxed{N(T) \propto T^{\kappa}} \qquad \boxed{\kappa = d_c + \frac{d_m}{2}}$$

$$\boxed{u(T) \propto T^{\kappa+1}}$$

## Loi de Stefan-Boltzmann généralisée : spectre hybride

Spectre « hybride » : Massif le long de $d_m$ directions, sans masse le long de $d_c$ directions

$$N(T) \sim \frac{V}{\lambda_{dB}^{d_m}\lambda_W^{d_c}} \sim T^{d_c + d_m/2}$$

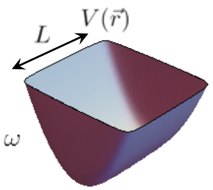
$$d = d_m + d_c$$

$$\kappa = d_c + \frac{d_m}{2}$$

particules massives dans un puits harmonique dans $d_c$ directions
et dans un potentiel de boîte dans $d_m$ directions

$$N(T) \sim \left(\frac{L}{\lambda_{dB}}\right)^{d_m}\left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)^{d_c} \sim T^{d_c + d_m/2}$$

Exemple : 2D massive particules 2D dans un potentiel boîte-harmonique




$$N(T) \sim T^{3/2} \qquad d_c = 1\;,\; d_m = 1$$

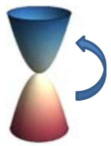
= particules dans un potentiel boîte 3D

$$d_c = 0\;,\; d_m = 3$$

## Loi de Stefan-Boltzmann généralisée : Fermions… avec $\mu$=0

fermions massifs

$$\epsilon = \pm\frac{p^2}{2m}$$



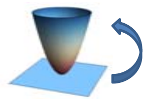
$N(T)$

Le réservoir est infini
Pas de transition

graphène bicouche

Bosons massifs

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m}$$

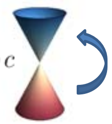


$N(T)$

Un réservoir avec un nombre fini de particules maintient le potentiel chimique nul.
Transition de Bose-Einstein quand N(T)=N.

fermions sans masse

$$\epsilon = \pm p\, c$$



$N(T)$

Graphène monocouche

Symétrie électron-trou → $\mu$ indépendant de T « gaz de Fermi compensé »

## Loi de Stefan-Boltzmann généralisée : Fermions… avec $\mu$=0

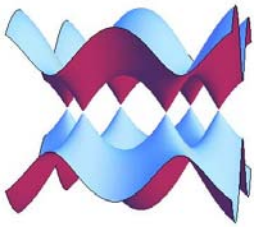
graphène bicouche

$$\epsilon = \pm\frac{p^2}{2m} \qquad d_m = 2 \qquad N(T) \propto \frac{m}{h^2}\, kT$$

$$\kappa = d_c + \frac{d_m}{2}$$

graphène monocouche

$$\epsilon = \pm p\, c \qquad d_c = 2 \qquad N(T) \propto \frac{(kT)^2}{(hc)^2}$$



Symétrie électron-trou → $\mu$ indépendant de T

## Loi de Stefan-Boltzmann généralisée : Fermions… avec $\mu$=0

graphène bicouche

$$\epsilon = \pm\frac{p^2}{2m} \qquad d_m = 2 \qquad N(T) \propto \frac{m}{h^2}\, kT$$

$$\kappa = d_c + \frac{d_m}{2}$$

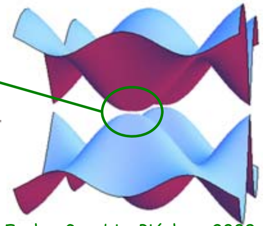
graphène monocouche

$$\epsilon = \pm p\, c \qquad d_c = 2 \qquad N(T) \propto \frac{(kT)^2}{(hc)^2}$$

Merging of Dirac points : semi-Dirac spectrum

$$\epsilon = \pm\sqrt{\left(\frac{p_x^2}{2m}\right)^2 + p_y^2 c^2} \qquad N(T) \propto \frac{m^{1/2}(kT)^{3/2}}{h^2 c}$$

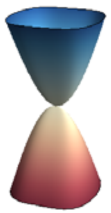
$$d_c = d_m = 1$$



Symétrie électron-trou → $\mu$ indépendant de T

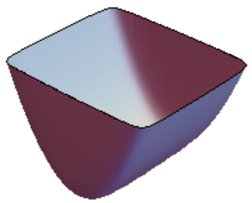
G.M., Fuchs, Goerbig, Piéchon, 2009

## Loi de Stefan-Boltzmann généralisée : $N(T) \sim T^{3/2}$



$$d_c = 1\ ,\ d_m = 1$$

$$N(T) \propto \frac{m^{1/2}(kT)^{3/2}}{h^2 c}$$



2D semi-Dirac fermions

2D bosons in boxed-harmonic potential

Electrons in a 3D semiconductor

3D bosons in boxed potential

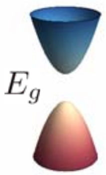
$$d_c = 0\ ,\ d_m = 3$$

$$N(T) \propto \frac{m^{3/2}}{h^3}\,(kT)^{3/2}$$

## Nombre de porteurs dans un semiconducteur intrinsèque 3D

C.B.

$E_g$



V.B.

$$N(T) = P(T) \simeq \frac{V}{4}\left(\frac{2\sqrt{m_c m_v}\, k_B T}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{-\beta E_g/2}$$

Electrons in a 3D semiconductor

3D bosons in boxed potential

$$d_c = 0\ ,\ d_m = 3$$

$$N(T) \propto \frac{m^{3/2}}{h^3}\,(kT)^{3/2}$$

$\boxed{d_c = 0 \atop d_m = 1}$ $\boxed{d_c = 1 \atop d_m = 1}$ $\boxed{d_c = 2 \atop d_m = 0}$

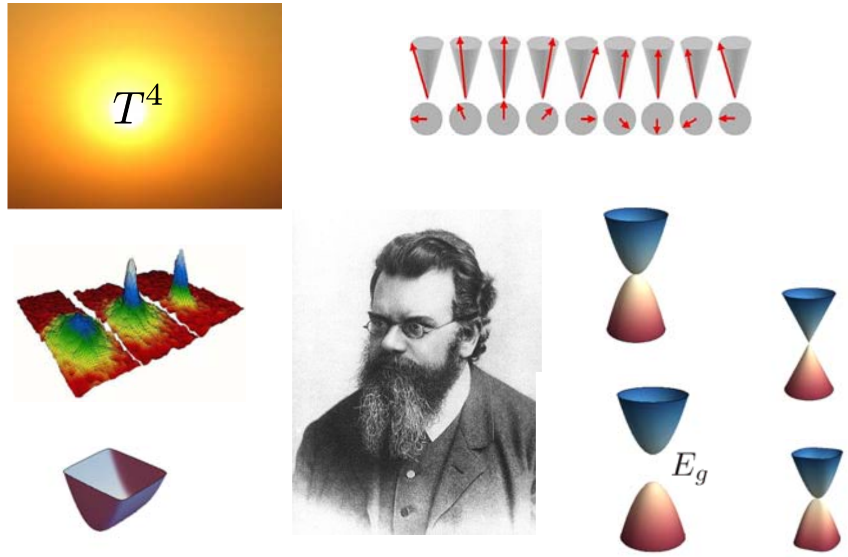
$$\boxed{u(T) \propto T^{\kappa+1} \qquad \kappa = d_c + \frac{d_m}{2}}$$

| | $\kappa = 1$ | $\kappa = 3/2$ | $\kappa = 2$ | $\kappa = 5/2$ | $\kappa = 3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| d=2 | *massive fermions* bilayer | *semi-Dirac fermions* $N(T) \propto \frac{S}{\lambda_{dB}\lambda_W}$ | black body *massless fermions* graphene | | |
| d=2 | | BEC + ⊔ + ⌣ $N(T) \propto \frac{L}{\lambda_{dB}} \frac{k_B T}{\hbar\omega}$ | BEC + ⌣ + ⌣ $N(T) \propto \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega}\right)^2$ | | |
| | | | | | |
| d=3 | | F-magnons *massive fermions* $N(T) \propto \frac{V}{\lambda_{dB}^3}$ | *hybrid MML fermions* $N(T) \propto \frac{V}{\lambda_{dB}^2 \lambda_W}$ | *hybrid MLL fermions* $N(T) \propto \frac{V}{\lambda_{dB}\lambda_W^2}$ | black body phonons, AF-magnons *massless fermions* $N(T) \propto \frac{V}{\lambda_W^3}$ |
| d=3 | | BEC + ⊔ + ⊔ + ⊔ $N(T) \propto \frac{V}{\lambda_{dB}^3}$ | BEC + ⊔ + ⊔ + ⌣ $N(T) \propto \frac{S}{\lambda_{dB}^2} \frac{k_B T}{\hbar\omega}$ | BEC + ⊔ + ⌣ + ⌣ $N(T) \propto \frac{L}{\lambda_{dB}} \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega}\right)^2$ | BEC + ⌣ + ⌣ + ⌣ $N(T) \propto \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega}\right)^3$ |
| $u(T)$ | $T^2$ | $T^{5/2}$ | $T^3$ | $T^{7/2}$ | $T^4$ |

$\boxed{d_c = 0 \atop d_m = 3}$ $\boxed{d_c = 1 \atop d_m = 2}$ $\boxed{d_c = 2 \atop d_m = 1}$ $\boxed{d_c = 3 \atop d_m = 0}$

Rien de quantique

$$\boxed{N(T) \propto T^{\kappa}}$$




arxiv.org/abs/1610.05940
Found. Phys. **48**, 395 (2018)

$$\boxed{u(T) \propto T^{\kappa+1} \qquad \kappa = d_c + \frac{d_m}{2}}$$

$\mu = 0$ .

*G. Montambaux*

## Planck's natural unit of action (1899)

M. Planck (1899) : natural unit of action

Quantitative analysis of Wien's law :

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi b}{c^3} \nu^3 e^{-a\nu/T}$$

$a$ and $b$ are parameters to be fixed by experiment,

from the position of the maximum (Wien's law) → $a$
from the total energy → $b/a^4$

$b = 6.885\, 10^{-34} J.s$ $\qquad a = 0.4818\, 10^{-10} K.s \qquad \longrightarrow \qquad a = \frac{h}{k_B}$

Planck discovers a natural unit of action ! *before* «the » quantum

and introduces natural units !

Über irreversible strahlungsvorgänge, Sitz. der Preuβischen Akademie der Wissenschaften,Berlin, 5, 440 (1899)

*G. Montambaux*

## Planck's natural unit of action (1899)

Wählt man nun die „natürlichen Einheiten“ so, dass in dem neuen Maasssystem jede der vorstehenden vier Constanten den Wert 1 annimmt, so erhält man als Einheit der Länge die Grösse:

$b \to h$ $\qquad \sqrt{\frac{bf}{c^3}} = 4{,}13 \,.\, 10^{-33}$ cm, $\qquad l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$ $\qquad \hbar$

als Einheit der Masse:

$\sqrt{\frac{bc}{f}} = 5{,}56 \,.\, 10^{-5}$ g, $\qquad m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$

als Einheit der Zeit:

$\sqrt{\frac{bf}{c^5}} = 1{,}38 \,.\, 10^{-43}$ sec, $\qquad t_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}$

als Einheit der Temperatur:

$a\sqrt{\frac{c^5}{bf}} = 3{,}50 \,.\, 10^{32°}$ C. $\qquad T_P = \frac{1}{k_B}\sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}}$

*These necessarily retain their meaning for all times and for all civilizations, even extraterrestrial and non-human ones, and can therefore be designated as "natural units"...*

M. Planck (1899) BEFORE Planck's constant !!!

*G. Montambaux*

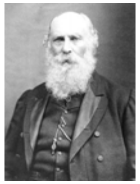
## Stoney's « physical units of nature » (1881)

*For each chemical bond which is ruptured within an electrolyte a certain quantity of electricity traverses the electrolyte, which is the same in all eases. This definite quantity of electricity I shall call $E_1$ (e). If we make this our unit quantity of electricity, we shall probably have made a very important step in our study of molecular phenomena.*

$$e \qquad l_S = \sqrt{\frac{e^2 G}{c^4}} = \sqrt{\alpha}\, l_P \qquad\qquad l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \qquad \hbar$$

$$m_S = \sqrt{\frac{e^2}{G}} = \sqrt{\alpha}\, m_P \qquad \Leftarrow \boxed{\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}} \Rightarrow \qquad m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$$

$$t_S = \sqrt{\frac{e^2 G}{c^6}} = \sqrt{\alpha}\, t_P \qquad\qquad t_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}$$

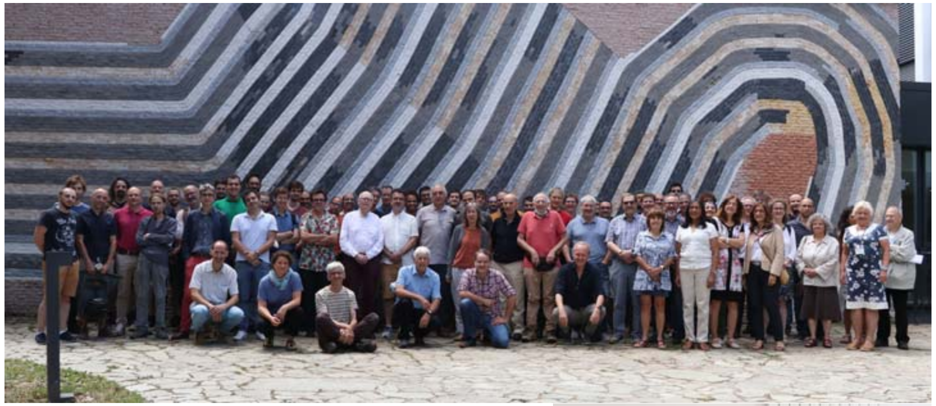


1826-1911

$$(4\pi\varepsilon_0 = 1)$$

*In this paper an estimate was made of the actual amount of this most remarkable fundamental unit of electricity, for which I have since ventured to suggest the name electron.*





Merci !